

MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION PAR RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE LIPPMANN-SCHWINGER ("MÉTHODES FFT") ET OUTILS NUMÉRIQUES ANNEXES : UN ÉTAT DES LIEUX

H. Moulinec *

* LMA, CNRS, UPR 7051, Aix-Marseille Univ, Centrale Marseille, F-13402 Marseille Cedex 20, France

Les méthodes d'homogénéisation à base de FFT s'appuient sur la résolution de l'équation Lippmann-Schwinger pour prédire le comportement mécanique de matériaux hétérogènes. Le problème qu'elles permettent de résoudre, est celui d'un volume Ω d'un matériau hétérogène **périodique** dont les propriétés sont connues en chaque point, que l'on soumet à une sollicitation mécanique donnée et dont on souhaite connaître la réponse mécanique. Dans le cas d'un matériau élastique dont le tenseur de rigidité est donné par $c(x)$ pour tout x de Ω , soumis à une contrainte macroscopique $\bar{\varepsilon}$, on peut montrer que le problème peut s'écrire sous la forme de l'équation de Lippmann-Schwinger (LS) :

$$\varepsilon = -\Gamma^0 * (\delta c : \varepsilon) + \bar{\varepsilon} \quad (1)$$

ou encore

$$(\mathbf{I} + \Gamma^0 \delta c) \varepsilon = \bar{\varepsilon} \quad \text{avec } \delta c(x) = c(x) - c^0 \quad (2)$$

où $\mathbf{I}$ est l'opérateur identité, c^0 est un matériau élastique homogène fictif et Γ^0 son opérateur de Green associé. L'opérateur Γ^0 s'exprime simplement dans l'espace de Fourier, ce qui a permis d'établir un algorithme de résolution de l'équation (1) par une méthode de point fixe, pour laquelle la loi de comportement est appliquée dans l'espace réel, et l'opérateur Γ^0 dans l'espace de Fourier, le passage d'un espace à l'autre se faisant à l'aide d'algorithmes de FFT et de FFT inverse.

L'étude des propriétés de l'opérateur Γ^0 permet de montrer que l'équation de Lippmann-Schwinger s'appuie sur une décomposition de Helmholtz généralisée de l'espace des champs de tenseurs du second ordre. Une formulation variationnelle du problème permet de montrer que la résolution de l'équation de LS se ramène à une méthode de descente de gradient. On peut également montrer que la formulation de l'équation de LS en déplacement s'apparente à un préconditionnement du problème considéré.

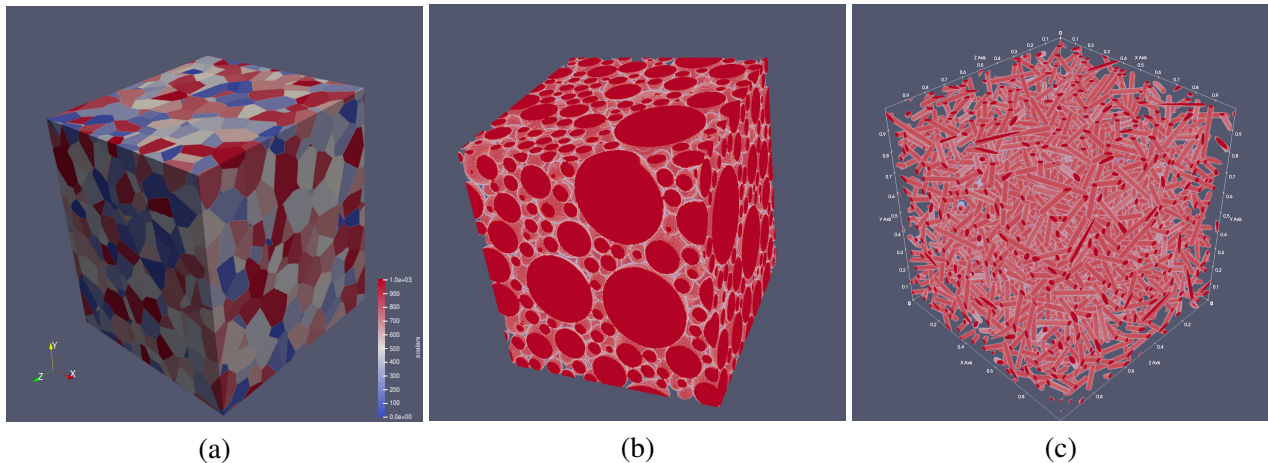


FIGURE 1 – (a) : Voronoi tessellation - 1000 grains, (b) : polydisperse spheres (10+100+1000) - volume fraction=71%, (c) : 1000 fibers - L/D=11 - f=10%

La méthode, depuis son introduction ([2]), a connu de nombreux développements. Ceux-ci permettent aujourd'hui de traiter des problèmes non-linéaires (ce que permettait déjà le schéma initial de 1994), et le cas des conditions aux bords mixtes, plusieurs autres schémas numériques ont été proposés (schémas en "polarisation", gradient conjugué, schéma de type Newton-Raphson, ...), des opérateurs de Green modifiés permettent de réduire les artefacts numériques dus aux transformées de Fourier et de faciliter la convergence, la méthode a été étendue au cadre des grandes déformations, des méthodes de "pixels composites" permettent de prendre en compte des fluctuations des champs à l'intérieur du pixel, des adaptations particulières ont été menées pour traiter

des matériaux poreux ou fracturés. Plus récemment, des études ont permis d'étendre la méthode à des grilles d'échantillonnages non régulières.

Pour plus de détails, le lecteur se réfèrera aux articles de revues ([3], [1]).

Les méthodes d'homogénéisation par FFT sont bien souvent appliquées à des modélisations de matériaux hétérogènes complexes, ce qui requiert l'emploi d'outils numériques de génération de microstructures artificielles. Pour modéliser des matériaux cristallins, il est souvent fait appel aux algorithmes de génération de tessellations de type Voronoi (voir Figure 1(a)). Des modélisations communément utilisées font appel à des algorithmes de distribution de sphères dures (Figure 1(a)) ou de fibres (Figure 1(c)) dans un volume.

Références

- [1] S Lucarini, M V Upadhyay, and J Segurado. Fft based approaches in micromechanics : fundamentals, methods and applications. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 30(2) :023002, dec 2021.
- [2] H. Moulinec and P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *C. R. Acad. Sc. Paris II*, **318** :1417–1423, 1994.
- [3] Matti Schneider. A review of nonlinear fft-based computational homogenization methods. *Acta Mechanica*, 232(6) :2051–2100, Jun 2021.